Тел: **+7 (707) 900 92 67**
Почта: **saken.yan@yandex.com**

8 ЛЕКЦИЯ

САНДЫҚ ӘДІСТЕР

§8. Сызықтық емес теңдеулерді шешу.

Жалпы түсінік.

Теңдеулерді шешу мәселелері үнемі практикада туындайды, мысалы, экономикада, бизнесті дамытуда (пайда қандай уақытта белгілі бір мәнге жететінін білгіңіз келсе), медицинада, дәрі-дәрмектердің әсерін зерттегенде (заттың концентрациясы берілген деңгейге қашан жететінін және т.б).

Оптимизациялау есептерінде көп жағдайда локальді экстремум нуктелерін табу қажет болады. Ол үшін біз функцияның туындысын нөлге теңестіріп жалпы жағдайда сызықты емес теңдеуді шешу қажет болады.

Осылайша, сызықтық емес теңдеулердің шешімдерін табуға қатысы көптеген есептердің жиынтығы туындайды. Мысалы:

$$x^2 - 2 = 0$$

немесе

$$e^x - 5 = 0$$

және сол секілді

Қарапайым жағдайда, бізге $[a, b]$ кесіндісінде анықталған және осы аралықта бір мәндерді қабылдайтын $f(x)$ функциясы берілген болсын.

Мақсатымыз:

Бізге $[a, b]$ кесіндісінде $f(x) = 0$ болатын функция түбірлерін яғни $x -$тің мәндерін, аңықтау қажет.

Визуалды түрде бізге $f(x)$ функциясының графигінің абсцисса осімен қиылысу нүктесін анықтау керек.

Берілген функцияның белгілі бір $[a, b]$ аралығындағы түбірлерін анықтаудың бірнеше сандық әдістерін қарастырайық. Атап айтқанда:

Екіге бөлу әдісі.

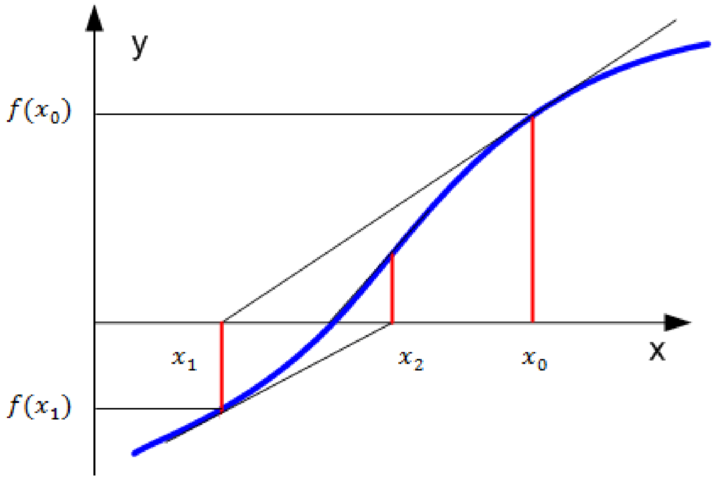
Ньютон әдісі.

Екіге бөлу әдісі.

$f(x) = 0$ теңдеуінің түбірлерін табудың қарапайым әдісі екіге бөліну немесе дихотомия әдісі болып табылады және бұл әдіс интуитивті түрде түсінікті.

Бұл әдістің алгоритмі келесідей:

Айталық, $f(x_0)$ және $f(x_1)$ мәндерінің таңбалары әр түрлі болатындай x_0 және x_1 екі нүктені таптық делік, онда осы нүктелер арасында функцияның кем дегенде бір түбірі болады.



$[x_0, x_1]$ аралығын екіге бөліп, $x_2 = \frac{(x_0 + x_1)}{2}$ деген орта нүктені енгізейік. Онда $f(x_2)f(x_0) \leq 0$, немесе $f(x_2)f(x_1) \leq 0$ болады. Осы пайда болған екі сегменттін арасынан функцияның сегменттің шеткі нүктелеріндегі мәндерінің көбейтіндісі теріс болатының қалдырайық та, ары қарай осы сегментті тағы да екіге бөлеміз. Осы операцияны қайта қайта орындау арқылы қажетті дәлдікпен түбірді табамыз.

Біз функцияның түбірі орналасқан аймақты біртіндеп кішірейте отырып анықтап отырмыз, сондықтан оны белгілі бір дәлдікпен анықтаймыз.

Сипатталған алгоритм кез-келген үздіксіз функцияға қолданылатындығын ескеріңіз.

Екіге бөлу әдісінің артықшылығы ретінде оның жоғары сенімділігі мен қарапайымдылығын атап айтуға болады.

Бұл әдістің кемшілігі мынада: оны қолданар алдында функцияның мәндері әртүрлі таңба қабылдайтындай екі нүктені табу керек.

Әдістің жинақталу реті сызықтық болып табылады, әр қадамда дәлдік екі есеге көбейеді, итерациалар саны неғұрлым көп болса, соғұрлым түбір дәлірек анықталады.

Мысал. c# тіліндегі код.

```
class Program
{
        static double function(double x) //Рассматриваемая функция
        {
            return Math.Pow(x,3.0) - 0.2 * x * x + 0.5 * x - 1;
        }

        static void Main(string[] args)
        {
            const double eps=0.000001; //Точность - (Дәлдік)
            double a,b; //Отрезок где предположительно расположен корень
            double mp; //Середина интервала по x.

            double f1,f2; //Значение функций в 1 и во 2 точке.

            double x; //Искомый корень уравнения.

            Console.WriteLine("Введите отрезок где предположительно
                                расположен корень уравнения!");

            while(true) //Для корректного ввода данных.
            {
                try
                {
                  Console.WriteLine("Введите a = ");
                  a = double.Parse(Console.ReadLine());
                  Console.WriteLine("Введите b = ");
                  b = double.Parse(Console.ReadLine());

                  break;
                } catch(Exception e)
                {
                  Console.WriteLine(e.Message);
                  Console.WriteLine("Неверный ввод данных! Повтарите ввод");
                }
            }

            do //Основной алгоритм поиска корня:
            {
                f1 = function(a); //Значение функций в 1 точке интервала
                mp = (a + b)/2.0; //середина интервала:
                f2=function(mp); //Значение функций в середине интервала:

                //Если f1*f2<=0 то вторая точка перемещается в середину.
                //в  другом случае первая точка перемещается в середину.
                if (f1*f2<=0) b = mp; else { a = mp;}
            }
            while(Math.Abs(b-a)>eps);
            //до того пока интервал больше нужной точности

            //КОНЕЦ ПОИСКА КОРНЯ И ДАЛЕЕ СЛЕДУЕТ ПРОВЕРКА.

            //Далее интервал стал меньше нужной точности

            //Определяем корень :
            x=(a+b)/2.0;
```

```
            //Находим значение функций соответствующей корню.
            f1=function(x);

            //Если это значение находиться около нуля(число близкое к нулю)
            if (Math.Abs(f1)<=0.000001)
            {
                Console.WriteLine("Корень с эпс {0}, x = {1} ",eps, x);
                Console.WriteLine("Значение функции F(X)= " + f1);
            }
            else
            {
                //Если это значение Не находиться около нуля
                Console.WriteLine("На этом отрезке корней нет!");
            }

            Console.ReadKey();
        }//Main
}//Program
```

Ньютона әдісі.

Классикалық ньютон немесе жанама әдісі мынадай: егер x_n нүктесі $f(x) = 0$ теңдеуінің x_* деген түбіріне жуық нүкте болса, онда келесі жуықтау x_n нүктесінде сызылған $f(x)$ функциясына жанаманың $x -$ осімен қиылысу нүктесі ретінде анықталады.

x_n нүктесіндегі $f(x)$ функциясының жанамасының теңдеуі мына түрде жазылады:

$$f'(x_j) = \frac{y - f(x_n)}{x - x_n}$$

Жанама теңдеуіне y $=$ 0 және $x = x_{(n+1)}$ қойсақ, сонда ньютон әдісі арқылы итерациялық түрде түбірді аңықтау алгоритмін табамыз:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Жанама арқылы түбірді аңықтау әдісінің жинақтылығы квадраттық болып табылады және оның реті 2 ге тең. Сонымен, ньютон немесе жаңама әдісінің жинақтылығы өте тез.

Ньютон әдісінің алгоритмі.

Ньютон әдісі (жаңама әдісі), егер $f(x) = 0$ теңдеуінің $[a, b]$ кесіндісінде түбірі болса және келесі шарттар орындалса қолданылады:

1. $y = f(x)$ функциясы $x \in [-\infty, +\infty]$ аралығында анықталған және үздіксіз;
2. $f(a)\cdot f(b) < 0$ яғни функция $[a,\ b]$ кесіндісінің ұштарындағы мәндері қарама-қарсы таңба қабылдайды;

3. $f'(x)$ және $f''(x)$ туындылары $[a,\ b]$ кесіндісіндегі өз таңбаларын сақтайды, яғни $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$, аралығында дөңестігін сақтап не жоғарылайды немесе кемиді;

4. $x\epsilon[a,\ b]$ үшін $f'(x) \neq 0$

Ньютон әдісінің алгоритмін нақты мысалда қарастырайық.
$[a,\ b]$ кесіндісінде үздіксіз өсетін $x^2 - 2 = 0$ функциясы берілсін, сонымен қатар $f'(x) = 2x > 0$ және $f''(x) = 2 > 0$

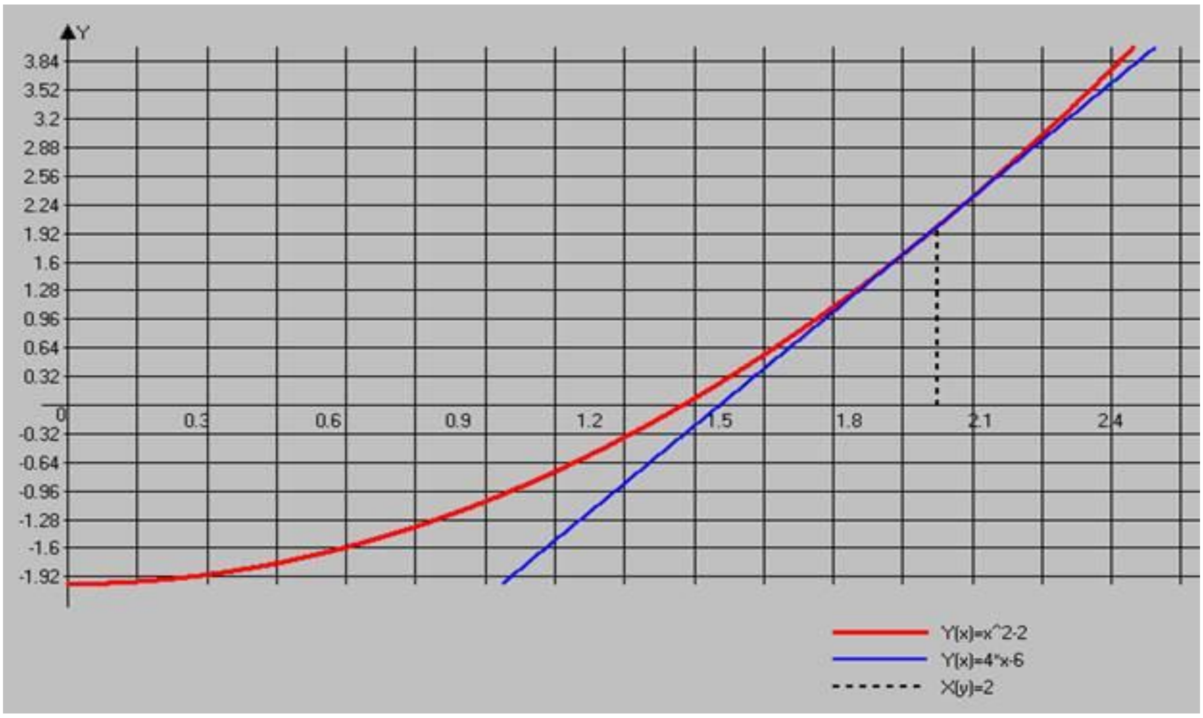
Жаңама теңдеуінің жалпы түрі:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

x_0 нүктесі ретінде $B_1(b, f(b)) = (2, 2)$ нүктесін таңдайық. B_1 нүктесіндегі $y = f(x)$ функциясына жанаманы жүргізейік те, жанаманың Ox осімен қиылысу нүктесін x_1 нүктесімен белгілейік. Сонда бірінші жаңаманың теңдеуін аламыз:

$y - 2 = 2{\cdot}2(x - 2), \qquad y = 4x - 6.$

Жаңаманың Ox осімен қиылысу нүктесі: $x_1 = \frac{6}{4} = 1.5$

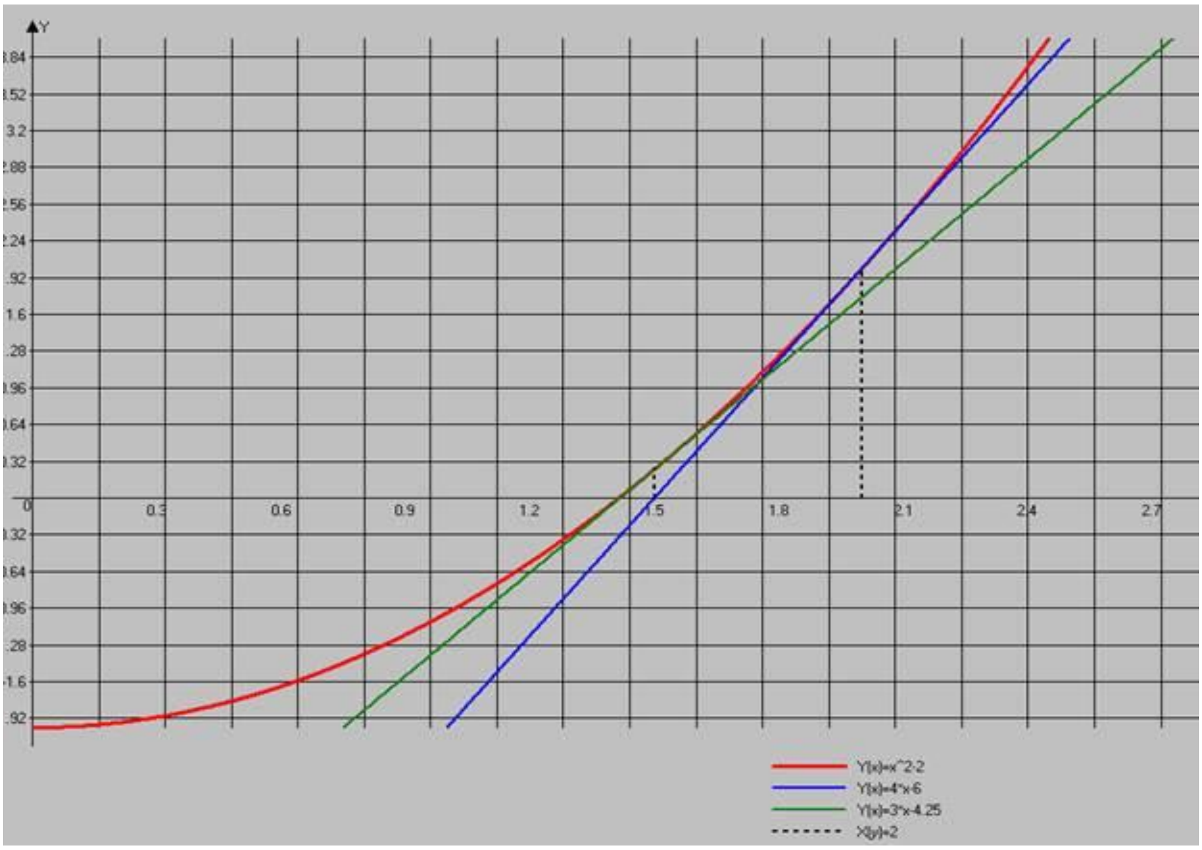


Содан кейін у = f (x) функциясының x_1 нүктесіндегі мәнің табамыз, сонда біз жаңа $B_2 = (1.5, 0.25)$ нүктесін аламыз. Енді тағы да, B_2 нүктесінде $y = f(x)$ функциясына жанаманы жүргізіп, жанаманың Ox осімен қиылысу нүктесін x_2 деп белгілейміз.

Затем находим точку пересечения функции $y = f(x)$ и перпендикуляра, проведенного к оси Ox через точку x_1, получаем точку $B_2 = (1.5, 0.25)$. Снова проводим касательную к функции $y = f(x)$ в точке B_2, и обозначаем точку пересечения касательной и оси Ox точкой x_2.

Екінші жаңаманың теңдеуі: $y - 0.25 = 2 \cdot 1.5(x - 1.5), \quad y = 3x - 4.25$

Жанама мен Ox осінің қиылысу нүктесі: $x_2 = \frac{4.25}{3}$.



Ары қарай осы қадамдарды қайталап отырамыз. Сонда түбір

Бірінші жуықтауда мына түрде анықталады:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5$$

Екінші жуықтауда мына түрде анықталады:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.416$$

үшінші жуықтауда мына түрде анықталады:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.414215$$

және сол секілді

i −ші жуықтауда мына түрде анықталады:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Лаборатория№8:

$e^x - 5 = 0$ теңдеуінің (1, 3) аралықтағы түбірін екіге бөлу әдісі және жаңама әдісі арқылы есептеп табыңыз.